page 1

Concours d'Entrée à l'Ecole des Ingénieurs de la Ville de Paris

Epreuve de calcul numérique
Durée 2 h - Coefficient 2

Le sujet comporte: 2 pages

Les trois parties du problème sont très largement indépendantes.
$\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels.

Ière partie

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1} & \text{pour } x \in \mathbb{R}^* \\ f(0) = 0 \end{cases}$

et on appelle (Γ) son graphe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1/ a) Vérifier que la fonction φ définie par $\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{x}{f(x)} & \text{pour } x \in \mathbb{R}^* \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$

est la somme d'une série entière sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2/ a) Donner le développement limité à l'ordre 2 de $f(x)$ au voisinage de zéro. En déduire les valeurs de $f'(0)$ et de $f''(0)$. Quelle est l'allure de (Γ) au voisinage de l'origine ?

b) Donner un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$. Préciser la nature de la branche infinie au voisinage de $+\infty$.

c) Vérifier l'existence d'un réel a tel que les fonctions $f(x)$ et ax^2 soient équivalentes au voisinage de $-\infty$. Etudier le signe de $f(x) - ax^2$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$ ainsi que sa limite quand x tend vers $-\infty$. En déduire la position de (Γ) par rapport à la parabole (P) d'équation $y = ax^2$.

3/ a) Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$

b) On pose $g(x) = \dfrac{(e^x - 1)^2}{x} f'(x)$. Etudier les variations de $g(x)$. En déduire le signe de $f'(x)$ quand x parcourt $\mathbb{R}$.

c) Vérifier que $f'(x)$ admet une racine unique α comprise entre 1 et 2. Donner une valeur approchée de α et de $f(\alpha)$ avec 3 décimales. On appliquera pour cela la méthode de Newton (ou de la tangente), à la fonction g en 1,6.
Aucun calcul d'erreur est demandé.

4/ a) Calculer $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$

b) On pose $h(x) = (e^x - 1)^3 f''(x)$ et $k(x) = \dfrac{h'(x)\, e^{-x}}{x}$

Donner les expressions de $h(x)$, $h'(x)$, $k(x)$, $k'(x)$, et $k''(x)$.

c) Déduire des résultats précédents le signe des fonctions k, h et f''.

On pourra vérifier que f'' admet une racine unique β comprise entre 3 et 4.

d) Donner une valeur approchée de β et de $f(\beta)$ avec 3 décimales en appliquant la méthode de Newton à la fonction h au point 3,1.

Tournez la page S. V. P.

page 2

5/ Tracer sur un même dessin les graphes (Γ) et (P), dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité = 3 cm)

6/ Soit $I = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

a) Vérifier la convergence de I

b) Montrer que I représente aussi l'aire de la portion de plan comprise entre (P) et (Γ), x variant de $-\infty$ à 0

IIème partie

1/ Calculer $I_n = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-nx}\,dx \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

2/ a) Simplifier l'expression $\frac{1}{e^x - 1} - (e^{-x} + e^{-2x} + \dots\dots\dots + e^{-nx})$

b) En déduire la formule $\int_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{e^x - 1} = \sum_{p=1}^{p=n} I_p + \int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^{-nx}}{e^x - 1}\,dx$

3/ Montrer l'existence d'un réel positif A tel que $\forall n \in \mathbb{N}^* \left| \int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^{-nx}}{e^x - 1}\,dx \right| \leq \frac{A}{n}$

En déduire la formule $\int_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{e^x - 1} = 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^3}$

IIIème partie

On considère la série de Riemann convergente $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^3}$

On pose $S_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p^3}$, $R_n = \sum_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^3}$ et $S = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^3}$

1/ Montrer qu'il existe un polynôme réel P unique de degré 2, que l'on explicitera vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \quad \frac{1}{x^3} - \frac{P(x)}{x(x^2-1)^2} = \frac{1}{x^3(x^2-1)^2}$

2/ Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $F(x) = \frac{P(x)}{x(x^2-1)^2}$

où P est le polynôme trouvé précedemment.

3/ a) Soit N un entier supérieur ou égal à $n+1$, simplifier $\sum_{n+1}^{N} \left(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^3(p^2-1)^2} \right)$

et donner sa limite quand N tend vers $+\infty$.

b) En déduire l'existence d'un polynôme Q de degré 2 que l'on explicitera tel que $\forall n \geq 1 \quad R_n = \frac{Q(n)}{n^2(n+1)^2} + \sum_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^3(p^2-1)^2}$

4/ a) Comparer les quantités $\frac{1}{p^7}$, $\frac{1}{(p-1)^7}$ et $\frac{1}{p^3(p^2-1)^2}$ pour $p \geq 2$

b) Comparer de même les quantités $\frac{1}{p^7}$, $\int_p^{p+1} \frac{dx}{x^7}$ et $\int_{p-1}^{p} \frac{dx}{x^7}$

c) déduire du a) et du b) un encadrement de $\sum_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^3(p^2-1)^2}$ et l'existence d'un nombre entier k tel que : $\frac{1}{k(n+1)^6} \leq S - S_n - \frac{Q(n)}{n^2(n+1)^2} \leq \frac{1}{k(n-1)^6} \quad \forall n \geq 2$

d) Appliquer la formule précédente au cas $n = 10$. Tous les calculs seront effectués avec 8 décimales.